

Name der Formel	Formel	Bedingung
Summenformel	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$	
Binomischer Lehrsatz	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$	
Bernoulli Ungleichung	$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$	$x \geq -1$
Dreiecksungleichung	$ a+b \leq a + b $	
Name des Satzes	Satz	Bedingung
Fundamentalsatz der Arithmetik	Jede Zahl n lässt sich eindeutig als Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen: $n = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \cdot \dots$	$n \in \mathbb{N} > 1$
Besondere Reihen	Formel / Grenzwert	Bedingung
Geometrische Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$	$ q < 1$
Geometrische Summe	$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$q \neq 1$
Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (divergiert)	
Alternierende harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \ln(2)$	Konvergiert, aber nicht absolut
Leibniz Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$	
Exponentialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) = e^x$ (konvergiert absolut)	$x \in \mathbb{Z}$
Besondere Funktion	Funktionsvorschrift	Bemerkung
Allgemeine Exponentialfunktion	$a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$	$x \in \mathbb{R}$
Tangens, Kotangens	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos(x) = 0\}$
Arkussinus, Arkuskosinus	$\arcsin x = \sin^{-1} x, \arccos x = \cos^{-1} x$	$D = [-1, 1]$
Cosinus-Hyperbolicus, Sinus-Hyperbolicus	$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$	gerader / ungerader Anteil $\exp(x)$
Tangens- Hyperbolicus, Kotangens-Hyperbolicus	$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	
Areafunktionen	Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen	

Konvergenz von Folgen

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

- Die "Grenze" N_ε in abhängigkeit von ε angeben (Vorschrift umkehren)
- $|a_n - a| < \varepsilon$ mit einer Ungleichungskette beweisen

Eine **konvergente Folge**:

ist beschränkt	hat einen eindeutigen Grenzwert	hat nur konvergente Teilfolgen	ist eine Cauchyfolge
----------------	---------------------------------	--------------------------------	----------------------

Es gelten außerdem folgende **Grenzwert-Rechenregeln**:

$\lim(f+g) = \lim(f) + \lim(g)$	$\lim(f \cdot g) = \lim(f) \cdot \lim(g)$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim(f)}{\lim(g)}, \lim(g) \neq 0$	$\lim(f^p) = (\lim(f))^p$	$f \leq g \Rightarrow \lim(f) \leq \lim(g)$
---------------------------------	---	--	---------------------------	---

Eine Folge (a_n) heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$, wenn $\forall K > 0 \exists n_K : \forall n \geq n_K : a_n > K$.

Eine Folge (a_n) heißt **Cauchy Folge**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon : |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ für $\forall p \in \mathbb{N}$. In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy Folge (**Vollständigkeitsaxiom**).

Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge und jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Konvergenz von Reihen

Die Folge $s_m := \sum_{i=0}^m a_i$ ist eine **Reihe** und die Zahl s_m ist die m -te **Partialsumme**.

Jede Folge lässt sich mit der **Teleskopsumme** als Reihe darstellen: $c_n = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1})$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Eine **absolut konvergente Reihe** konvergiert auch und jede **Umordnung** einer absolut konvergenten Reihe **konvergiert auch** absolut mit gleichem Grenzwert.

Cauchy Kriterium 1: $(s_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert gdw. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall m > n \geq N_\varepsilon : |\sum_{i=n+1}^m a_i| < \varepsilon$.

Cauchy Kriterium 2: Wenn $(s_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Monotoniekriterium: Wenn $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \geq 0$ und $(s_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ beschränkt ist, dann ist (s_n) konvergent.

Leibniz Kriterium: Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert $(s_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$.

Majorantenkriterium: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent und $\exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N : |b_k| \leq |a_k|$, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$.

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ divergent und $\exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N : |b_k| \geq |a_k|$, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$.

Quotienten-Kriterium: Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = d < \infty$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent, falls $d < 1$ und divergent, falls $d > 1$.

Wurzel-Kriterium: Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d < \infty$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent, falls $d < 1$ und divergent, falls $d > 1$.

Cauchy-Produkt: Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = a$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = b$ absolut konvergent. Dann gilt für $c_n := \sum_{j=0}^n a_j \cdot b_{n-j}$, dass $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = a \cdot b$.

Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Vorgehensweise und Rechenregeln analog zu reellen Zahlen, aber es gelten keine Ordnungsrelationen und der Absolutbetrag wird anders definiert.

Die Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$, gdw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a)$. (Gleiches gilt für Reihen).

Die Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ist eine Cauchy-Folge, gdw. $\operatorname{Re}(z_n)$ und $\operatorname{Im}(z_n)$ Cauchy-Folgen sind.

Für den Grenzwert einer konjugiert komplexen Folge gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{a_n}) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}$.

Exponentialfunktion

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$	$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$	$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$	$(\exp(x))' = \exp(x)$
-------------------------------------	--------------------------------	--------------------------------------	------------------------

Darstellung als **endliche Summe** mit abschätzbarem Rest: $\exp(x) = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} + \operatorname{Rest}(x)$ mit $|\operatorname{Rest}(x)| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ und $|x| \leq \frac{N+2}{2}$.

Sinus/Cosinus Herleitung: $e^{i \cdot x} = \operatorname{Re}(e^{i \cdot x}) + i \cdot \operatorname{Im}(e^{i \cdot x}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$.

Sinus/Cosinus Eigenschaften:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$	$\sin(x \pm y) = \pm \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)$
-----------------------------	---	---

b-adische Brüche

Bsp.: $0, \overline{312}$ soll in einen Bruch umgewandelt werden: $1000 \cdot 0, \overline{312} - 0, \overline{312} = 312, \overline{312} - 0, \overline{312} = 312 = 999 \cdot 0, \overline{312} \Rightarrow 0, \overline{312} = \frac{312}{999}$.

Infimum / Supremum von Mengen

$a \in \mathbb{R}$ heißt **Berührungspunkt** der Menge A , wenn in jeder ε -Umgebung von a **mindestens ein Punkt** aus A liegt und **Häufungspunkt** bei **unendlich vielen**.

Supremum: Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge. Dann bezeichnet $\sup(M)$ die kleinste obere Schranke.

Infimum: Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte Menge. Dann bezeichnet $\inf(M)$ die größte untere Schranke.

Ist $M \subset \mathbb{R}$ nicht nach **oben** / **unten** begrenzt, dann gilt: $\sup(M) = \infty$ / $\inf(M) = -\infty$. Außerdem gilt: $\sup(\emptyset) = -\infty$ und $\inf(\emptyset) = \infty$.

Der **Limes Superior** einer Folge (a_n) ist definiert als $\limsup a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k \mid k \geq n\})$. Das Supremum fällt monoton mit wachsendem n .

Der **Limes Inferior** einer Folge (a_n) ist definiert als $\liminf a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{a_k \mid k \geq n\})$. Das Infimum steigt monoton mit wachsendem n .

Sei H die Menge aller Häufungspunkte der Folge (a_n) , dann gilt: $\limsup a_n = \sup(H)$ und $\liminf a_n = \inf(H)$.

Sei (a_n) eine gegen a konvergierende Folge, dann gilt: $\limsup a_n = \liminf a_n = a$.

Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, dann hat die Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ den **Definitionsbereich** $D(f) = D \subseteq \mathbb{R}$ und den **Wertebereich** $W(f) = \{y \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$.

Für zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ist die **Bildmenge** von A : $f(A) := \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$ und die **Urbildmenge** von B : $f^{-1}(B) := \{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt:

injektiv	$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$	Zwei Elemente aus A zeigen nicht auf dasselbe Element aus B
surjektiv	$\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$	Auf jedes Element in B zeigt min. ein Element aus A
bijektiv	f ist injektiv und surjektiv	Dann hat f eine eindeutige Umkehrung f^{-1}

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), gdw. $D(f) = D(g)$ und $\forall x \in D: f(x) = g(x)$.

Eine Funktion f heißt **gerade**, wenn $f(x) = f(-x)$ (Achsensymmetrisch zur y-Achse) und **ungerade**, wenn $f(x) = -f(-x)$ (Punktsymmetrisch zum Ursprung).

Eine Funktion f mit symmetrischem $D(f)$, kann als Summe $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ einer **geraden** und einer **ungeraden** Funktion dargestellt werden.

Die **Monotonie** einer Funktion f auf dem Intervall I wird gezeigt mit $f(x) <, =, >, \geq f(y)$ für $\forall x, y \in I, x < y$.

Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, falls $\sup\{f(x) \mid x \in D\} < \infty$ und **nach unten beschränkt**, falls $\inf\{f(x) \mid x \in D\} > -\infty$.

Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **periodisch**, falls eine **Periode** $\alpha > 0$ existiert, so dass $x \in D \Rightarrow (x + \alpha) \in D$ und $f(x + \alpha) = f(x)$ (kleinstes α heißt „**primitiv**“).

Ist $f: A \rightarrow B$ bijektiv, dann ist die ebenfalls bijektive Umkehrfunktion $f^{-1}: B \rightarrow A$ definiert als: $f^{-1}(y) = x$, falls $y = f(x)$.

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x_n) \subseteq D$ eine bel. Folge mit $x_n \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$. Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$, dann ist der **Grenzwert** von f : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$.

- $f(x)$ strebt **von links** gegen g , wenn $x_n < a$, und **von rechts** gegen g , wenn $x_n > a$.

Eine Funktion f heißt im Punkt x_0 **linksseitig stetig**, wenn $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$, **rechtsseitig stetig**, wenn $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$ und **stetig**, wenn beides gilt.

Eine Funktion heißt stetig im Intervall I , wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in I$ stetig ist.

Folgenkriterium zum Beweis von Stetigkeit: Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$ und $x_n \neq a$, dann ist f stetig, gdw: $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(a)$.

$\epsilon - \delta$ -Kriterium: Die Funktion f ist stetig im Punkt $x_0 \in D(f)$ gdw. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Sind die Funktionen f und g im Punkt x_0 stetig, dann sind auch diese Funktionen stetig: $f \pm g$, $f \cdot g$, $g \circ f$ und (für $g \neq 0$) $\frac{f}{g}$.

Nullstellensatz: Ist f in $I = [a, b]$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen, dann besitzt f in (a, b) mindestens eine Nullstelle.

Zwischenwertsatz: Ist f in $I = [a, b]$ stetig und y eine beliebige Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es mindestens ein x zwischen a und b mit $f(x) = y$.

Existenz der Umkehrfunktion: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Intervall I streng monoton und stetig, dann existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf $D = f(I)$ und ist stetig.

Satz von Weierstraß: Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und besitzt Maximum und Minimum.

Logarithmus-Rechenregeln:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\log_a(1) = 0$
---	--	----------------------------------	--	-----------------

Die Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ heißt **echt gebrochen** rational, wenn **Grad $p <$ Grad q** und **unecht gebrochen** rational, wenn **Grad $p \geq$ Grad q** .

Eine Funktion f heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert. Dann ist sie an dieser Stelle auch stetig.

Eine Funktion f heißt im Intervall I diffbar, wenn jede Stelle $x_0 \in I$ diffbar ist und die beiden Randpunkte einseitig (links- bzw. rechtsseitig) diffbar sind.

Eine Funktion f heißt auf I **stetig diffbar**, wenn sie dort diffbar ist und ihre Ableitung $f'(x)$ stetig ist.

Seien f und g differenzierbare Funktionen mit den Ableitungen f' und g' . Es gilt:

$(f + g)' = f' + g'$	$(c \cdot f)' = c \cdot f' \ (c \in \mathbb{R})$	Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (mit $g \neq 0$)	Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
----------------------	--	---	---	---

Besondere Ableitungsformeln:

$\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$	$(\ln(y))' = \frac{1}{y}$	$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$	$((x+a)^k)' = k \cdot (x+a)^{k-1}$
-----------------------------------	---------------------------	--	---------------------------------	------------------------------------

Leibnitz Regeln: Sind f, g n -mal diffbar, dann gilt: $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$ und $f(x) \cdot g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$.

An der Stelle x_0 kann eine Tangente gebildet werden $t(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, die ein lineares Modell von f um die Stelle x_0 darstellt.

Nimmt die Funktion f in $I = [a, b]$ einen **Extremwert** an, dann gilt für $x_0 \in (a, b)$: $f'(x_0) = 0$ und an den Randstellen die **Variationsungleichungen**:

$\forall x \in I: f'(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0$ bei einer **Minimalstelle** und $\forall x \in I: f'(x_0) \cdot (x - x_0) \leq 0$ bei einer **Maximalstelle**.

Satz von Rolle: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Mittelwertsatz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, dann gibt mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diffbar, dann existiert ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit $\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}$ ($h'(x_0) \neq 0$).

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 n -mal diffbar, dann kann sie durch das **Taylor-Polynom** $T_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$ approximiert werden.

Es gilt: $f(x) = T_n[f, x_0](x) + \text{Rest}(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1}$, wobei ξ zwischen x und x_0 gewählt wird.

Newton-Verfahren: Annähern an eine Nullstelle, indem der Startwert x_0 geraten wird und mit $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ iteriert wird.

Sei f auf $I = (a, b)$ (zweimal) diffbar, dann ist f konvex in I gdw. $\forall x, y \in I: (f'(y) - f'(x)) \cdot (y - x) \geq 0$ (bzw. $\forall x \in I: f''(x) \geq 0$).

Sei f zweimal diffbar, dann macht ihr Graph auf dem Intervall I eine **Rechtskurve**, wenn $f''(x) < 0$ bzw. eine **Linkscurve**, wenn $f''(x) > 0$.

Bei einem **Wendepunkt** $f''(x) = 0$, ändert sich das Kurvenverhalten von **links nach rechts**, wenn $f'''(x) < 0$ bzw. von **rechts nach links**, wenn $f'''(x) > 0$.

L'Hospital: Wenn f, g diffbar und $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, dann gilt: $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (gilt auch für nur einseitige Grenzwerte von unten/oben).

Integrale

Wird die Fläche gesucht, die f mit der x -Achse auf $[a, b]$ einschließt, dann ist mit der **Zerlegung** $Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und m_i, M_i als **kleinster/größter** Funktionswert in $[x_{i-1}, x_i]$ auch die **Untersumme** $S_f = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ und die **Obersumme** $S_f = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ definiert.

Wählt man aus jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ aus Z ein beliebiges ξ_i , so ist die **Riemannsumme** als $R(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ definiert.

Eine Funktion ist **Riemann-integrierbar**, wenn das **Oberintegral** $\bar{I}_f = \inf_Z (S_f(Z))$ gleich dem **Unterintegral** $I_f = \sup_Z (S_f(Z))$ ist.

Ist Z_n eine Folge von Zerlegungen, deren Feinheit (für $n \rightarrow \infty$) gegen 0 strebt, so strebt das **Riemann-Integral** $\lim_{n \rightarrow \infty} R(Z_n)$ gegen $\int_a^b f(x) dx$.

Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat die Form $z := a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. $a := \text{Re } z$ heißt **Realteil** und $b := \text{Im } z$ **Imaginärteil**.

Für $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ gilt:

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$	$z_1 * z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{ z_2 ^2} = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} * i$
--	--	--	---

Ist $z = a + bi$ so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl**. Daraus folgt: Betrag-Quadrat: $|z|^2 = z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag von z , dann gilt: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ und $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Vektoren

Seien $v_1, \dots, v_K$ Vektoren aus V und $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ Skalare aus K , dann heißt $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_K v_K$ eine **Linearkombination** der Vektoren.

Die Vektoren $v_1, \dots, v_K$ heißen **linear unabhängig** (l.u.) genau dann, wenn aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_K v_K = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_K = 0$ ist.

Die maximale Zahl l.u. Vektoren eines VR heißt **Dimension**. In einem m-dimensionalen VR wird jedes m-Tupel von l.u. Vektoren **Basis** genannt.

U heißt **Unterraum** von V , wenn $U \neq \emptyset$, $U \subset V$ und: $v + u \in U$ und $\lambda v \in U$ (mit $u, v \in U$ und $\lambda \in K$).

Für eine Menge von Vektoren $\{v_1, \dots, v_m\}$ ist die Menge aller Linearkombinationen definiert als: **Span** $\{v_1, \dots, v_m\} := \{v \in V \mid v = \sum_{i=1}^m \lambda_i * v_i\}$ mit $\lambda_i \in K$.

Die Menge $E = \{v_1, \dots, v_m\}$ heißt **Erzeugendensystem** von V , wenn **Span** $(E) = V$. Dann ist E „unverkürzbar“ und „unverlängerbar“.

Austauschlemma: In einer Basis B kann ein Vektor mit einem anderen ausgetauscht werden. Sind die Vektoren danach noch l.u., bleibt B' eine Basis.

Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung mit dem **Definitionsbereich** A und **Wertebereich** $f(A) = B$.

Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, dann heißt $f(A') := \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$ die **Bildmenge** von A' und $f^{-1}(B') := \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$ die **Urbildmenge** von B' .

Die Abbildung f ist **linear**, wenn $F(\lambda u + \mu v) = \lambda * F(u) + \mu * F(v)$ für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt. Dann gilt auch $F(0) = 0$.

Eine lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ ist ein **Isomorphismus**, wenn F **bijektiv** ist, ein **Endomorphismus**, wenn $V = W$ und ein **Automorphismus**, wenn beides gilt.

Ist die Vektorfamilie (v_i) in V linear abhängig, dann ist $F(v_i)$ in W linear abhängig und es gilt: $\dim(F(V)) \leq \dim(V)$.

Eine lineare Abbildung f hat (abhängig von der Basis B des Definitionsbereichs) eine **darstellende Matrix** $M_B(f)$, sodass $w = F(v) \Leftrightarrow w = M_B(f) * v$.

Die Bilder der Basisvektoren von V sind die Spalten von $M_B(f)$. Man kann auch $v = M * w$ nach $M_{11}, M_{12}, \dots$ auflösen, wenn nur Beispiele gegeben sind.

Der **Kern** von f ist definiert als $\ker(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0 \in W\}$ und das **Bild** als $\text{im}(f) = f(V) := \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\}$.

Dimensionsgleichung: $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \text{def}(f) + \text{rg}(f)$. Der **Defekt** ist die Dimension des Kernes und der **Rang** die des Bildes.

Matrixmultiplikation: Sei $A = (a_{ij})$ vom Typ $M \times N$ und $B = (b_{ij})$ vom Typ $N \times R$, dann ist $C = (c_{ij}) = A * B$ vom Typ $M \times R$ definiert als: $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} * b_{kj}$.

Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix, dann ist ihre Transposition A^T definiert als $A^T = (a_{ji})$.

Eine Matrix hat einen **Spaltenraum** $SR(A) := \text{span}\{a^1, \dots, a^n\} \subset K^m$ und einen **Zeilenraum** $ZR(A) := \text{span}\{a_1, \dots, a_m\} \subset K^n$.

Der **Rang** einer Matrix ist definiert als: $\text{rg}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = \dim ZR(A) = \dim SR(A) = \text{Spaltenrang}(A)$.

Elementarmatrizen: $S_i^j(\lambda)$ multipliziert die i. Zeile mit λ , P_i^j vertauscht die Zeilen i und j , $Q_i^j(\lambda)$ addiert das λ -Fache der j. Zeile zur i. Zeile hinzu.

Die Multiplikation mit Elementarmatrizen verändert Lösungsmengen nicht. Die Multiplikation von **links** / **rechts** bewirkt **Zeilen-** / **Spaltenumformungen**.

Eine quadratische Matrix heißt **invertierbar**, wenn $A \in GL(m, K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = m \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Dann gilt: $A * A^{-1} = E_m$.

Determinante

Eine **Permutation** $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ weist bijektiv jedem Element irgendein anderes aus der gleichen Menge zu: $\sigma: \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$.

Die Menge aller Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ ist definiert als: $S_n = \{\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \sigma \text{ bijektiv}\}$. Für die Mächtigkeit gilt: $|S_n| = n!$.

Eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$, bei der alle Elemente auf sich selber zeigen, außer zwei Elemente, die "vertauscht" sind, heißt **Transposition** τ ($\text{sign}(\tau) = -1$).

Das **Signum** $\text{sign}(\sigma)$ einer Permutation ist $1 / -1$, wenn die Anzahl der **Fehlstände** (für $i < j$ gilt $\sigma(i) > \sigma(j)$) **gerade** / **ungerade** ist.

Die **Determinante** $\det(A)$ gibt die Fläche des durch die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von A aufgespannten Parallelogramms an.

Sie ist **linear**, **alternierend** (hat A zwei gleiche Zeilen, dann gilt: $\det A = 0$) und **normiert** ($\det E_n = 1$). Außerdem gilt: $\det(\lambda * A) = \lambda^n * \det A$ und $\det A = \det A^t$.

Die **λ -Fache Addition** einer Zeile auf eine andere, ändert die Determinante nicht. Eine **Zeilenvertauschung** dreht das Vorzeichen um.

Besitzt A eine 0-Zeile, dann ist $\det A = 0$. Sind A_1, A_2 quadratische Matrizen und C beliebig, dann gilt für $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, dass $\det A = \det A_1 * \det A_2$.

Leibniz-Definition der Determinante: Für $A = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ gilt: $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) * a_{1, \sigma(1)} * \dots * a_{n, \sigma(n)}$.

Laplace-Entwicklungssatz: $A \in M(n \times n)$ nach der i -ten Zeile entwickeln: $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det A'_{ij}$ (A'_{ij} ist A , ohne die i -te Zeile und die j -te Spalte).

Dreiecksform: A in obere Dreiecksform bringen, dann ist die Determinante das Produkt der Diagonalen (Achtung: VZ wechselt nach jeder Zeilenvertauschung).

Sarrus: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{blau} & \text{rot} & \text{blau} & \text{rot} & \text{blau} \\ a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{23}a_{31} & a_{13}a_{21}a_{32} & a_{13}a_{22}a_{31} & a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix} \Rightarrow \det A = r_1 + r_2 + r_3 - b_1 - b_2 - b_3$

Cramer'sche Regel: Sei $A = (a^1 \ a^2 \ \dots \ a^n) \in GL(n; K)$ und gesucht ist x , sodass $A * x = b$. Dann gilt: $x_i = \frac{1}{\det A} * \det(a^1 \ a^2 \ \dots \ a^{i-1} \ b \ a^{i+1} \ \dots \ a^n)$.

Inversenformel: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} * C^t$, mit $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = (-1)^{i+j} * \det A'_{ij}$.

Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume eines Endomorphismus

$A, B \in M(n, K)$ heißen **ähnlich**, falls es ein $S \in GL(n, K)$ gibt, sodass: $B = S * A * S^{-1}$.

Sei $F: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann heißt $\lambda \in K$ **Eigenwert** von F , falls für ein $v \in V$, $v \neq 0$ gilt: $F(v) = \lambda * v$. [$v \neq 0$ heißt **Eigenvektor** zum EW λ]

$F \in \text{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ aus Eigenvektoren gibt. Dann ist: $M_B(F) = (F(v_1) \ \dots \ F(v_n)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Wenn $n = \dim V$ und $F \in \text{End}(V)$ n verschiedene Eigenwerte hat, ist F **diagonalisierbar**. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer l.u.

Die **Eigenwerte** $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ von $A \in M(n, n, K)$ lassen sich über die Nullstellen des **Charakteristischen Polynoms** $\det(A - \lambda * E_n)$ berechnen.

Der **Eigenvektor** v zu einem Eigenwert λ wird ausgerechnet, indem $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (z.B. mit Gauß) gelöst wird.

Der **Eigenraum** zu einem Eigenwert λ sind alle Vielfachen des zugehörigen Eigenvektors v : $\text{Eig}(A; \lambda) = \{v \in V \mid A * v = \lambda * v\}$.