

1 Konvergenz im $\mathbb{R}^d$

Eine Punktfolge $\{x_n\} \in \mathbb{R}^d$ konvergiert gdw. ihre Komponenten konvergieren.

Sie ist genau dann konvergent, wenn sie eine **Cauchyfolge** ist: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N_\epsilon : |x_n - x_m| < \epsilon$.

Eine **Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad \forall p \geq 1 : |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$.

2 Mengen im $\mathbb{R}^d$

Eine Menge Ω heißt **offen**, wenn es für jeden Punkt eine offene Kugel in Ω gibt: $\forall x_0 \in \Omega \quad \exists B_r(x_0) \subset \Omega$.

Eine Menge A heißt **abgeschlossen**, wenn jede konvergente Folge aus A gegen einen Punkt aus A konvergiert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \in A$.

Die Menge $M^c := \mathbb{R}^d \setminus M$ heißt **Komplementärmenge** von M und ist abgeschlossen, wenn M offen ist und umgekehrt.

M heißt **beschränkt**, wenn sie komplett in einer abgeschlossenen Kugel liegt: $\exists r > 0 : M \subset K_r(0)$

M heißt **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

$A \subset M$ liegt **dicht** in M , wenn $\forall x_0 \in M \quad \forall \epsilon > 0 : \exists x \in A \cap B_\epsilon(x_0)$

Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$, dann heißt x_0

- **innerer Punkt** von M , wenn es eine ϵ -Umgebung gibt, die komplett in M liegt: $\exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x_0) \subset M$.
- **Randpunkt** von M , wenn in jeder ϵ -Umgebung Punkte aus M und M^c liegen.
- **Häufungspunkt** von M , wenn in jeder ϵ -Umgebung unendlich viele Punkte aus M liegen.
- **isolierter Punkt** von M , wenn $x_0 \in M$, aber x_0 kein Häufungspunkt ist.

$\overset{\circ}{M}$ ist die Menge aller inneren Punkte von M (**das Innere**)

∂M ist die Menge aller Randpunkte von M (**der Rand**)

Der **Durchmesser** einer beschränkten, nichtleeren Menge M ist definiert als $\text{diam}(M) := \sup\{|x - y|; x, y \in M\}$

3 Funktionen in $\mathbb{R}^d$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subset \mathbb{R}^d$.

Ein **Niveau** zum Wert $a \in \mathbb{R}$ ist definiert als $\{x \in D | f(x) = a\}$ und eine **Niveaumenge** als $N_f(a) = \{x \in D | f(x) \leq a\}$.

Satz von Weierstraß: f nimmt auf einer kompakten Menge Minimum und Maximum an.

f heißt **stetig** in $x_0 \in D$, wenn für alle gegen x_0 konvergierenden Folgen $\{x_n\} \subset D$ (komponentenweise) gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Trick für Stetigkeit: $f(x)$ in Polarkoordinaten umschreiben und $r \rightarrow 0$ laufen lassen.

f heißt **partiell diffbar** nach x_j in x_0 , wenn der Grenzwert $f_{x_j}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)}{h}$ existiert.

(Im $\mathbb{R}^2$: $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ und $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$)

f heißt **stetig partiell diffbar** in D , wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.

Satz von Schwarz: Ist f p -mal stetig partiell diffbar, dann ist die Reihenfolge des partiellen Ableitens egal (und $H_f(x)$ symm.).

Der Vektor $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x) \\ \vdots \\ f_{x_d}(x) \end{pmatrix}$ heißt **Gradient** von f und zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion.

Die Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen $H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_d x_1} & \cdots & f_{x_d x_d} \end{pmatrix}$ heißt **Hessematrix**.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{pmatrix}$ in allen Komponenten partiell diffbar, dann heißt $J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix}$ **Jacobimatrix**.

Mittelwertsatz: $\exists \phi \in (0, 1) : f(x_0 + h) - f(x_0) = h_1 * f_{x_1}(x_0 + \phi h) + \dots + h_d * f_{x_d}(x_0 + \phi h)$

Prüfen auf Diffbarkeit: stetig partiell diffbar $\implies$ total diffbar $\implies$ partiell diffbar $\wedge$ stetig

Außerdem: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0) * (x-x_0) - f_y(x_0,y_0) * (y-y_0)}{|(x-x_0, y-y_0)|} = 0 \implies f$ ist total diffbar in (x_0, y_0) .

Ist f total diffbar und a ein Vektor ($|a| = 1$), dann ist $\frac{df}{da}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), a \rangle$ die **Richtungsableitung** von f in Richtung a bei x_0 .

Polarkoordinaten: $(x, y) = (r * \cos(\phi), r * \sin(\phi))$; **Kugelkoordinaten:** $(x, y, z) = (r * \sin(\theta) * \cos(\phi), r * \sin(\theta) * \sin(\phi), r * \cos(\theta))$

4 Taylorpolynom 2. Ordnung im Entwicklungspunkt (x_0, y_0)

$$T_{[(x_0, y_0), f]}(x, y) = \textcolor{red}{f}(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0) \\ + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0) * (x - x_0)^2 + 2 * f_{xy}(x_0, y_0) * (x - x_0) * (y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) * (y - y_0)^2)$$

5 Definitheit

Eine symmetrische $d \times d$ Matrix $P = P^T$ heißt

- **positiv definit**, gdw. $\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0}^d : x^T * P * x > 0$ (alle EW und Hauptminoren sind positiv)
- **negativ definit**, gdw. $\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0}^d : x^T * P * x < 0$ (alle EW sind negativ und Hauptminoren abwechselnd negativ und positiv)
- **indefinit**, gdw. weder positiv noch negativ definit (es gibt positive und negative EW)
- **pos./neg. semidefinit**, gdw. nicht strikt pos. oder neg. (0 wird eingeschlossen, ein EW ist 0, $\det(P) = 0$)

6 Extremalstellen

Notwendig: In kritischen/stationären Punkten sind alle partiellen Ableitungen 0: $J_f(x) = 0$.

Hinreichend: Ist x_0 ein kritischer Punkt, ist er ein lokales **Minimum/Maximum**, wenn $H_f(x)$ **positiv/negativ** definit ist.

7 Implizite Funktionen

Fixpunktsatz von Banach: Sei A abgeschlossen und $\phi : A \rightarrow A$ eine Kontraktion ($\forall x, y \in A : |\phi(x) - \phi(y)| \leq k * |x - y|; k \in (0, 1)$). Dann besitzt A genau einen Fixpunkt $x^* \in A$ mit $\phi(x^*) = x^*$ und die Folge $(x_n) \subset A$ mit $x_{n+1} = \phi(x_n)$ konvergiert gegen x^* .

$f(x, y) = 0$ kann bei (x_0, y_0) lokal durch eine Funktion $g(x) = y$ beschrieben werden, wenn $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Umkehrbarkeit von f : $\forall x : \det(J_f(x)) \neq 0 \implies f$ ist lokal invertierbar. f^{-1} existiert, wenn f injektiv ($f(x) = f(y) \implies x = y$).

Ableitung der Umkehrfunktion: $J_{f^{-1}}(x) = (J_f(f^{-1}(x)))^{-1} \Leftrightarrow J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}$

8 Untermannigfaltigkeiten

Sei $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\forall x \in T : J_\phi(x) \neq 0$, dann ist ϕ eine **Inversion** ($\forall x \in T$ gibt es eine offene Umgebung auf der ϕ injektiv ist). $M \subset \mathbb{R}^d$ heißt **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit** des $\mathbb{R}^d$, wenn es für jedes $a \in M$ ein $U \subset \mathbb{R}^d$, ein $t \subset \mathbb{R}^k$ und eine Inversion $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt, sodass $\phi(T) = M \cap U$. Die Spalten von $J_\phi(t)$ bilden die Basis für den **Tangententialraum** $T_{\phi(t)}(M)$.

Die Nullstellenmenge $N = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^d$, gdw. $\forall x \in N : \text{rang}(\nabla f(x)) > 0$.

Die **Normale** $n \in \mathbb{R}^d$ einer Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^d | f(x) = 0\}$ im Punkt x_0 ist $n = \nabla f(x_0)$. Der **Tangententialraum** ist $\perp$ zu n .

9 Lagrange

An kritischen Punkten von $f(x)$ unter der NB $g(x) = 0$ ist die Ableitung der **Lagrangefunktion** $\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) - \lambda * \nabla g(x) = 0$.

Im $\mathbb{R}^2$ müssen die Gleichungen $\det \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} = 0$ und $g(x, y) = 0$ aufgelöst werden (und ggf. Definitheit von $H_L(\ker(g'))$ prüfen).

Beschreibt die NB eine kompakte Menge, lässt sich die Art der Extremstellen durch Einsetzen prüfen (Satz von Weierstraß).

10 Kurven

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **regulär**, gdw. $\forall t \in [a, b] : \dot{\gamma}(t) \neq 0$. Dann hat γ bei t den **Tangentenvektor** $T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$.

Ist $\dot{\gamma}$ stetig, lässt sich die **Länge** der Kurve berechnen durch $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$.

Skalares Kurvenintegral: $\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) * |\dot{\gamma}(t)| dt$ **Arbeitsintegral:** $\int_\gamma k \bullet ds = \int_a^b \langle k(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$

Ist F ein **Potentialfeld** mit dem Gradienten $\nabla F = k$, dann gilt: $\int_\gamma k \bullet ds = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

11 Integration

$M \subset \mathbb{R}^d$ heißt **Jordan-messbar**, wenn für ein Gitter mit immer kleiner werdenden Maschenweite gilt: $F_i(m) = F_o(m)$.

$B \subset \mathbb{R}^d$ heißt **regulärer Bereich**, wenn sie kompakt ist, ihr Inneres ein Gebiet ist und ihr Rand aus Hyperflächen besteht.

Für jeden Bereich $B \subset \mathbb{R}^d$ wird das **Volumen** durch $F(B) := \int_B 1 dx$ berechnet.

Wenn B ein regulärer Bereich ist (also Jordan-messbar) und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gilt: $\exists x^* \in B : \int_B f(x) dx = f(x^*) * F(B)$.

Normalbereich bzgl. der x_j -Achse: Definition der Menge nach x_j freistellen und als Funktionen ausdrücken.

12 Skalarprodukt, Norm und Metrik

Die Bilinearform $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; \langle x, y \rangle = x^T * y = x_1 * y_1 + \dots + x_d * y_d = \|x\| * \|y\| * \cos(\phi)$ heißt **kanonisches Skalarprodukt**.

Es gilt: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ und $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ und $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$ und $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

SKP in $\mathbb{C}^d$: $\langle z, w \rangle_c := z_1 * \overline{w_1} + \dots + z_d * \overline{w_d}$. Es gilt: $\langle z, \lambda w \rangle_c = \lambda * \langle z, w \rangle_c$ und $\langle z, w \rangle_c = \overline{\langle w, z \rangle_c}$.

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ heißt **euklidische Norm** und es gilt: $\|x\| \geq 0$ ($= 0$, wenn $x = 0$) und $\|\lambda * x\| = |\lambda| * \|x\|$ und $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Besitzt ein VR V eine Norm $\|\bullet\|$, mit diesen drei Eigenschaften, heißt $(V, \|\bullet\|)$ **normierter Raum**.

Wichtige Normen: $|x|_* = \max(|x_1|, \dots, |x_d|)$ und $|x|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$

Cauchy-Schwarz: $\forall x, y \in \mathbb{R}^d : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| * \|y\|$ (wenn x, y linear abhängig, gilt sogar: $|\langle x, y \rangle| = \|x\| * \|y\|$).

Die **Metrik** (Abstand) zweier Punkte ist definiert als $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+, d(x, y) := \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_d - x_d)^2}$.

Es gilt: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ und $d(x, y) = d(y, x)$ und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Besitzt ein Vektorraum V eine Metrik d , die diese drei Eigenschaften erfüllt, heißt (V, d) **metrischer Raum**.

13 Bilinearformen

$s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Bilinearform** auf V , wenn gilt: $s(\lambda v + v', w) = \lambda s(v, w) + s(v', w)$ und $s(v, \lambda w + w') = \lambda s(v, w) + s(v, w')$.

Sie heißt **symmetrisch**, wenn $s(v, w) = s(w, v)$ (bzw. wenn $M_B(s)$ symmetrisch ist) und **alternierend**, wenn $s(v, w) = -s(w, v)$.

Sei $B = \{v_1, \dots, v_d\}$ eine Basis von V , dann ist $M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{ij}$ die **darstellende Matrix** von s und $s(x, y) = x^T * M_B(s) * y$.

Zu einer symm. Bilinearform kann man die **quadratische Form** definieren als $q_s : V \rightarrow K, q_s(v) = s(v, v)$.

Aus der quadratischen Form $q_s(v)$ lässt sich eine symm. Bilinearform "polarisieren": $s(v, w) = \frac{1}{2} * (q_s(v + w) - q_s(v) - q_s(w))$.

Ausartungsraum: $V_0(s) = \{v \in V | \forall w \in V : s(v, w) = 0\}$ (entspricht dem Kern der darst. Matrix: $\{x \in K^d | M_B(s) * x = 0\}$).

Dimensionsformel: $\text{rang}(s) := \dim(V) - \dim(V_0(s)) = \text{rang}(M_B(s))$ (wenn $\dim(V_0(s)) = 0 \Rightarrow$ nicht entartet).

$s : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, s(f, g) = \int_0^1 f(t) * g(t) dt$ ist eine Bilinearform mit der **Hilbert-Matrix** als $M_B(s)$ (mit Monombasis).

Seien Φ_a, Φ_b Koordinatensysteme zu den Basen A, B von V , dann heißt $T_B^A = \Phi_B^{-1} * \Phi_A$ **Koordinatentransformation**.

Es gilt dann $v = \Phi_a(x) = \Phi_b(x') \Leftrightarrow x' = T_B^A * x$ und $M_A(s) = (T_B^A)^T * M_B(s) * T_B^A$ und $M_B(s) = ((T_B^A)^{-1})^T * M_A(s) * (T_B^A)^{-1}$.

Eine **orthogonale Basis** $(\{v_1, \dots, v_d\})$ mit $s(v_i, v_j) = 0$ von s wird ermittelt, indem $M_B(s)$ symmetrisch diagonalisiert wird.

Die Abbildung $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Sesquilinearform**, wenn $s(\lambda v + v', w) = \lambda s(v, w) + s(v', w)$ und $s(v, \lambda w + w') = \overline{\lambda} s(v, w) + s(v, w')$.

Gilt zusätzlich $s(w, v) = \overline{s(v, w)}$ heißt s **hermiteschen Form** mit einer hermiteschen darstellenden Matrix ($A = \overline{A^T} = A^*$).

Jede positiv definite **symmetrische** / **hermitesche** Bilinearform auf einem **euklidischen** / **unitären** Vektorraum heißt **Skalarprodukt**.

14 Orthogonalität

Die Vektoren $(v_1, \dots, v_n)$ heißen **orthogonal** gdw. $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$ und **orthonormal**, wenn zusätzlich $\forall i : \|v_i\| = 1$.

Ist $B_o = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V , kann jedes $v \in V$ dargestellt werden als $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle * v_i$.

Aus einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$ eines VR kann mit **Gram-Schmidt** eine Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_n)$ gefunden werden:

Es gilt: $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} * v_1$ und $w_m = \frac{1}{\|w'_m\|} * w'_m$ mit $w'_m = v_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle v_m, w_i \rangle * w_i$.

Ist V ein VR und $W \subset V$ ein UVR, dann ist $W^\perp = \{v \in V | v \perp W\}$ das **orthogonale Komplement** auch UVR von V .

$A = QR$ -Zerlegung: Q besteht aus den G-S-Orthonormalisierten Spalten von A und $R = \begin{pmatrix} |w'_1| & \langle w_1, v_2 \rangle & \dots & \langle w_1, v_n \rangle \\ 0 & |w'_2| & \dots & \langle w_2, v_n \rangle \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & |w'_n| \end{pmatrix}$.

Hat das LGS $A * x = b$ keine Lösung, wird ein x^* mit $R * x^* = Q^T * b$ gesucht, das die Lösung möglichst gut approximiert.

Ein Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ mit $F = A * x$ heißt **orthogonal** / **unitär**, gdw. $\forall v, w \in V : \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

Dementsprechend heißt eine Matrix A **orthogonal**, wenn $A^{-1} = A^T$ bzw. **unitär**, wenn $A^{-1} = \overline{A^T}$ ($A^{-1} * A = E_n$).

Die Zeilen/Spalten von A bilden dann eine **Orthonormalbasis** und man schreibt $A \in O(n)$ / $A \in U(n)$ und $|\det(A)| = 1$.

$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist eine Drehung um α und $B_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ eine Spiegelung.

F heißt **selbstadjungiert**, wenn $\forall v, w \in V : \langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle$ bzw. $M_B(F)$ **symmetrisch** / **hermetisch** ist. Dann sind alle EW reell und alle EV sind orthogonal und bilden eine Orthonormalbasis von F .

15 Affinitäten

Ist L ein affiner UVR ($L = L_0 + p$), dann ist $(p_0, \dots, p_k)$ eine affine Basis von L , wenn $(p_1 - p_0, \dots, p_k - p_0)$ eine Basis von L_0 ist. $f : K^n \rightarrow K^m$ ist affin, gdw. $f(x) = y = b + A * x$ gilt mit $A \in M(m \times n; K)$ und $b \in K^m$.

Ist $f : V \rightarrow V$ affin und bijektiv, heißt sie **Affinität** und ihre Umkehrabbildung $f^{-1}(y) = A^{-1} * y - A^{-1} * b$ ist auch eine Affinität.

Für die **erweiterte Matrix** gilt: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ b_1 & \\ \vdots & A \\ b_m & \end{pmatrix}$; $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ und somit $y' = A' * x'$.

Man bestimmt eine Affinität aus Punkten, indem man erst A bestimmt ($A * (p_i - p_0) = (q_i - q_0)$) und dann die Verschiebung b .

16 Quadriken im $\mathbb{R}^2$

Der Kegelschnitt $a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0 = x^T * \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} * x + \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}^T * x + a_{00} = x^T * A * x + b^T * x + c$

kann auch als erweiterte Matrix: $(1, x_1, x_2) * \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{a_{01}}{2} & \frac{a_{02}}{2} \\ \frac{a_{01}}{2} & a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{02}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Normalformen: Gerade: $x_1^2 = 0$ Zwei Geraden: $x_1^2 = 1$ und $x_1^2 - x_2^2 = 0$ Parabel: $x_1^2 - 2x_2 = 0$ Ursprung: $x_1^2 + x_2^2 = 0$
Hyperbel: $x_1^2 - x_2^2 = 1$ Kreis: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ Leere Menge: $x_1^2 = -1$ und $-x_1^2 - x_2^2 = 1$

Bestimmen der Normalform: Erweiterte Matrix A' von Q bestimmen. A' so zu B' symm. diagonalisieren, dass A (2×2 -Matrix unten rechts) diagonal ist. B' in Quadrik umwandeln und Normalform ablesen.

Hauptachsentransformation: Sei $Q = x^T * A * x + b * x + c = 0$, dann muss die Quadrik als erstes **rotiert** werden:

Die Matrix T hat als Spalten die normalisierten EV von A und die Diagonalmatrix $D = T^T * A * T$ besteht aus den EW von A .

Die rotierte Quadrik lautet dann $Q' = y^T * D * y + (b * T) * y + c = 0$ und muss für die Translation wieder ausmultipliziert werden.

Die **Translation** erfolgt durch quadratisches Ergänzen $y^2 + \alpha y = (y + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha^2}{4}$ und Substituieren $z := (y + \frac{\alpha}{2})$.

17 Allgemeine Rechenregeln

$\log(x * y) = \log(x) + \log(y)$ $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$ $\log(1) = 0$ $\log_a(a) = 1$

Mit $z = a + bi$: $z_1 * z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 * \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ $|z|^2 = z * \bar{z} = a^2 + b^2$ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$1 + \sinh(x)^2 = \cosh(x)^2$ $\sinh'(x) = \cosh(x)$ $\cosh'(x) = \sinh(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x) * \cos(y) \mp \sin(x) * \sin(y)$

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n * (n+1)}{2}$ $\sum_{k=0}^n q = \frac{1}{1-q}$, wenn $|q| < 1$ $\sum_{k=0}^n q = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, wenn $q \neq 1$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$, wenn $x \geq -1$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} * \frac{1}{k} = \ln(2)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

$\int_a^b u'(x) * v(x) dx = [u(x) * v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) * v'(x) dx$ $\int_a^b f(g(x)) * g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$

$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\int \sin(x)^2 dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$ $\int \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$ $\int \sin(x) * \cos(x) dx = -\frac{1}{2}\cos(x)^2$
 $\int \sinh(x)^2 dx = \frac{1}{2}(\sinh(x)\cosh(x) - x)$ $\int \cosh(x)^2 dx = \frac{1}{2}(x + \sinh(x)\cosh(x))$ $\int \sinh(x) * \cosh(x) dx = \frac{1}{2}\cosh(x)^2$

$\int_a^b \int_c^d f(x) * g(y) dy dx = \int_a^b f(x) dx * \int_c^d g(y) dy$